NICOLETA-LILI CIOCAN

# MATERIAL COMPENSATORIU PENTRU ELEVII CU TSI

## – Matematică –

Cluj-Napoca, 2025

ISBN 978-973-0-41911-5

## Progresii Aritmetice

- $a_n = a_1 + (n-1)\cdot r$

$a_1$ – primul termen, $r$ – rația, $a_n$ –termenul de rang $n$

- $r = a_{n+1} - a_n$
- $S_n = \frac{n(a_1+a_n)}{2}$ sau $S_n = \frac{n(2a_1+(n-1)\cdot r)}{2}$, unde

$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$ (suma primilor n termeni ai progr.)

- **Nr.** $\div$ $a$, $b$, $c$ **sunt în progresie aritmetică** dacă $b = \frac{a+c}{2}$

## Progresii Geometrice

- $b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$

$b_1$-primul termen, $q$ – rația, $b_n$ - termenul de rang $n$

- $q = b_{n+1} : b_n$
- $S_n = b_1 \frac{(q^n-1)}{(q-1)}$, $q \neq 1$ unde

$S_n = b_1 + b_2 + b_3 + \cdots + b_n$ (suma primilor n termeni ai progr)

- **Nr.** $\div$ $a$, $b$, $c$ **sunt în progresie geometrică cu termeni pozitivi dacă** $b = \sqrt{a\cdot c}$

## Logaritmi

- $\log_a b$ → **Condiții:** $b > 0$, ($a > 0$ *și* $a \neq 1$ *condiția pt bază*) $\Longrightarrow$ *interval*
- $\log_a 1 = 0$, $\log_a a = 1$, $\ln e = 1$, $\lg 10 = 1$
- $a^{\log_a b} = b$
- $b = b \cdot \log_a a = \log_a a^b$
- **Schimbarea bazei logaritmului** $\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$
- $\log_a b + \log_a c = \log_a (b\cdot c)$
- $\log_a b - \log_a c = \log_a (b : c) = \log_a \frac{b}{c}$
- $\log_a b^n = n \log_a b$
- $\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$

## Puteri și Radicali

- $\sqrt{a}$ →**condiții** $a \geq 0 \Rightarrow$ *interval*
- $a^0 = 1$, $1^n = 1$, $a^{-1} = \frac{1}{a}$, $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$
- $\sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}}$, $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$, $\frac{1}{\sqrt[n]{a^m}} = a^{\frac{-m}{n}}$
- $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$, $a^n : a^m = a^{n-m}$
- $\sqrt{a}\cdot\sqrt{b} = \sqrt{ab}$, $\sqrt{a} : \sqrt{b} = \sqrt{a : b}$
- $(a^n)^m = a^{n\cdot m}$, $(a\cdot b)^n = a^n \cdot b^n$
- $\sqrt{a}^2 = |a|$, $\sqrt[3]{a}^3 = a$
- **Formula radicalilor compuși:**

$$\sqrt{A \pm \sqrt{B}} = \sqrt{\frac{A+C}{2}} \pm \sqrt{\frac{A-C}{2}},\ C = \sqrt{A^2 - B}$$

## NUMERE COMPLEXE- forma algebrică

$z = a + bi$ sau $z = (a, b)$ $a, b \in \mathbb{R}$

$a = Re(z)$ realul lui z $\quad b = Im(z)$ imaginarul lui z

*Conjugatul lui z:* $\bar{z} = a - bi$

*Modulul lui z:* $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

$z_1 = a_1 + ib_1$ , $z_2 = a_2 + ib_2$ <u>sunt EGALE</u> dacă $a_1 = a_2$ și $b_1 = b_2$

*Operații – forma algebrică:*

$z_1 \pm z_2 = (a_1 + ib_1) \pm (a_2 + ib_2)$

$z_1 \cdot z_2 = (a_1 + ib_1) \cdot (a_2 + ib_2)$

*Raportul a două nr. Complexe*

*se calculează amplificând raportul cu conjugatul numitorului*

$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\overline{z_2})z_1}{z_2} = \frac{z_1 \cdot \overline{z_2}}{z_2 \cdot \overline{z_2}}$ ,unde $z_2 \cdot \overline{z_2} = a_2^2 + b_2^2$

$|z| = |\bar{z}|$ ; $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$

; $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$; $|z|^2 = z \cdot \bar{z}$

*Puterile lui i :* $i^1 = i$ , $i^2 = -1$ , $i^3 = -i$ , $i^4 = 1$ , $i^5 = i$ , $i^6 = -1$ ...

## NUMERE COMPLEXE- forma trigonometrică

$z = x + yi \quad \rightarrow M(x, y)$

În planul complex:

$M(r, \varphi), r = raza\ polară, \varphi = argument\ polar$

$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$,

$\varphi = arctg\frac{y}{x}$ , când $M \in CadrI$ sau pe axa $Ox$

$\varphi = arctg\frac{y}{x} + \pi$ , când $M \in CadrII, III$ sau pe axa $Ox'$

$\varphi = arctg\frac{y}{x} + 2\pi$ , când $M \in CadrIV$

**Forma trigonometrică a unui nr complex:**

$$z = r(cos\varphi + isin\varphi), \varphi \in [0, 2\pi) \ , cos\varphi = \frac{x}{r} \ , sin\varphi = \frac{y}{r}$$

**Operații – forma trigonometrică:**

$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}[cos(\varphi_1 - \varphi_2) + isin(\varphi_1 - \varphi_2)]$

$z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2[cos(\varphi_1 + \varphi_2) + isin(\varphi_1 + \varphi_2)]$

$$z^n = r^n(cos\, n\varphi + i\, sin\, n\varphi)$$

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\left(cos\frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i\, sin\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right)$$

## Modul și Parte întreagă

$|x| \leq a \Leftrightarrow -a \leq x \leq a$

$|x| \geq a \Leftrightarrow x \geq a$ sau $x \leq -a$

$x = [x] + \{x\}$,

$[x] = partea\ întreagă, \{x\} = partea\ fracționară$

Proprietăți: $x - 1 < [x] \leq x$ , $\{x\} = x - [x]$

## Formule de calcul prescurtat

$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$

$(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$

$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$

$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$

## Metode de numărare

$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$, $\quad \mathbf{0! = 1\,, 1! = 1}$

$\boldsymbol{P_n = n!}$ **- permutări**

(Permutări= numărul de mulțimi ordonate formate cu $n$ elem. distincte)

$\boldsymbol{A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}}, 0 \le k \le n;\ \ k, n \in N$ - **aranjamente**

(Aranjamente= numărul de **submulțimi ordonate** de $k$ elemente cu $n$ elemente distincte) ex.:(1,2), (2,1) sunt diferite

$\boldsymbol{C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}}, 0 \le k \le n;\ \ k, n \in N$ **– combinări**

(Combinări= numărul de **submulțimi** de $k$ elemente cu $n$ elemente distincte) ex.:{1,2}={2,1}sunt la fel

**Numărul de submulțimi** ale unei mulțimi cu $n$ elemente este $\mathbf{2^n}$

**Numărul de funcții** de tipul $\boldsymbol{f: A \to B}$ este $\boldsymbol{(card\ B)^{(card\ A)}}$

**Numărul de funcții bijective** de tipul $\boldsymbol{f: A \to A}$ este $\boldsymbol{(card\ A)!}$

Obs: $\boldsymbol{card\ A}$= *numărul de elemente al mulțimii A*

## Procente

$$p\%\ din\ x = \frac{p}{100} \cdot x$$

**Scumpirea** unui produs, unde **x=preț inițial (se cere)**

$$x + \frac{p}{100} \cdot x = preț\ final$$

**Ieftinirea** unui produs, unde **x=preț inițial (se cere)**

$$x - \frac{p}{100} \cdot x = preț\ final$$

**Prețul cu T.V.A.** al unui produs, unde **x=preț inițial și P=procent T.V.A.**

$$x + \frac{P}{100} \cdot x = preț\ final$$

**Dobânda** oferită de bancă după $n$ ani, S=sumă inițială, r=rata dobânzii

$D = S_{inițială} \cdot \frac{r}{100} \cdot n \to$ dobânda

$\boldsymbol{S_{finală} = S_{inițială} + D = S_{inițială} + S_{inițială} \cdot \frac{r}{100} \cdot n}$

## Binomul lui Newton

$$\boldsymbol{(a+b)^n} = C_n^0 a^n b^0 + C_n^1 a^{n-1} b^1 + \cdots + \boldsymbol{C_n^k a^{n-k} b^k} + \cdots + C_n^n a^0 b^n$$

*Formula termenului general:*

$$\boldsymbol{T_{k+1} = C_n^k a^{n-k} b^k,\ 0 \le k \le n;\ \ k, n \in N}$$

*Suma coeficienților binomiali:* $C_n^0 + C_n^1 + \cdots + \boldsymbol{C_n^k} + \cdots + C_n^n = 2^n$

*Suma coef. binomiali pari:* $C_n^0 + C_n^2 + \cdots + \boldsymbol{C_n^{2k}} + \cdots = 2^{n-1}$

*Suma coef. binomiali impari:* $C_n^1 + C_n^3 + \cdots + \boldsymbol{C_n^{2k+1}} + \cdots = 2^{n-1}$

## Probabilități

$$P = \frac{nr.\,cazuri\ favorabile}{nr.\,cazuri\ posibile}$$

Nr. Cazuri favorabile = cerința problemei (ce se cere?)

Nr. Cazuri posibile = totalul elementelor (care se dă !)

## FUNCȚIA DE GRADUL 1 $f: A \to B, f(x) = ax + b$

***Funcție PARĂ:*** $f(-x) = f(x), \forall x \in A$

***Funcție IMPARĂ:*** $f(-x) = -f(x), \forall x \in A$

***Funcție injectivă:*** $f(x) = f(y) \Longrightarrow x = y$

***Funcție surjectivă:*** $\forall y \in B, \exists!\, x \in A$ a.î. $f(x) = y \Leftrightarrow \forall y \in B$ ecuația $f(x) = y$ are soluție unică în $A$

*Dacă o funcție este injectivă și surjectivă* ***ESTE bijectivă.***

***INVERSA*** *unei funcții (bijective)* ***se calculează*** *din ecuația:*

***f(x)=y având necunoscuta x,adică:***

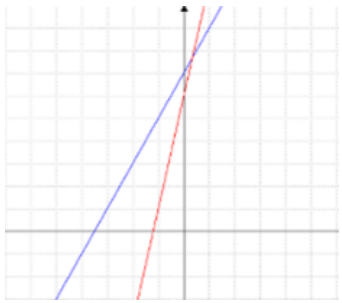
$ax + b = y \Rightarrow x = \frac{y-b}{a} \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{x-b}{a}$ ***- inversa funcției***

***INTERSECȚIA*** *Graficului funcției* ***CU AXELE****, când f(x)=y, XOY*

$$Gf \cap Ox = \{(x, 0)\} \Rightarrow y = 0 \;\; \Rightarrow f(x) = 0 \;\Rightarrow\; x = \cdots$$

$$Gf \cap Oy = \{(0, y)\} \Rightarrow x = 0 \;\; \Rightarrow f(0) = y \;\Rightarrow\; y = \cdots$$

***INTERSECȚIA GRAFICELOR A DOUĂ FUNCȚII*** $f$ *și* $g$



$Gf \cap Gg = M(x_M, y_m)$

*Se rezolvă sistemul:* $\begin{cases} f(x) = y \\ g(x) = y \end{cases}$

*Obs! Soluția sistemului reprezintă coordonatele punctului M*

## FUNCȚIA DE GRADUL 2 $f: A \to B, f(x) = ax^2 + bx + c$

*Funcția PARĂ, IMPARĂ, injectivă, surjectivă, bijectivă, păstrează aceleași reguli ca fc. de gr. 1.*

***SEMNUL*** *fc. de gradul 2: rezolvăm ecuația* $ax^2 + bx + c = 0$

$a = \cdots, b = \cdots, c = \cdots, \qquad \Delta = b^2 - 4ac$

1) $\Delta > 0 \;\Rightarrow\; x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$ **semnul în tabelul de mai jos**
2) $\Delta = 0 \;\Rightarrow\; x_{1,2} = \frac{-b}{2a}$ **, semnul funcției este semnul lui** $a$
3) $\Delta < 0 \;\Rightarrow\; nu\ exist\check{a}\ solu\check{t}ii\ reale$ **, semnul funcției este semnul lui** $a$**, există soluții complexe** $x_{1,2} = \frac{-b \pm i\sqrt{\Delta}}{2a}$

| x | $x_1$ | | $x_2$ |
|---|---|---|---|
| f(x) | Semnul lui a 0 | Semn opus lui a 0 | Semnul lui a |

**Inecuații:**

$f(x) > 0,\; ax^2 + bx + c > 0$ ⇔**intervalul corespunzător semnului +**

$f(x) < 0, ax^2 + bx + c < 0,$ ⇔**intervalul corespunzător semnului –**

***INTERSECȚIA*** *GRAFICULUI FUNCȚIEI* ***CU AXELE,***

*Când* $f(x) = y,\;\; sist.\ XOY$

$$Gf \cap Ox = \{(x_1, 0), (x_2, 0)\} \Rightarrow y = 0 \;\; \Rightarrow f(x) = 0 \;\Rightarrow\; x_{1,2} = \cdots$$

$$Gf \cap Oy = \{(0, y)\} \Rightarrow x = 0 \;\; \Rightarrow f(0) = y \;\Rightarrow\; y = \cdots$$

***INTERSECȚIA GRAFICELOR A DOUĂ FUNCȚII*** $f$ *și* $g$

$Gf \cap Gg = M(x_M, y_m)$ **Se rezolvă sistemul:**

$\begin{cases} f(x) = y \\ g(x) = y \end{cases}$ ***Obs!*** **Soluția sistemului sunt coordonatele pc. M**

***SEMNUL*** *fc. de gradul 1: rezolvăm ecuația* $ax + b = 0 \Rightarrow x = \frac{-b}{a}$

| *x* | $x = \frac{-b}{a}$ |
|---|---|
| *f(x)* | *Semn opus lui a* *0* *Semnul lui a* |

***Inecuații:***

$f(x) > 0$ ⇔intervalul corespunzător semnului + din tabelul de semn

$f(x) < 0$ ⇔intervalul corespunzător semnului – din tabelul de semn

**Fc.** $\mathbf{f(x) = ax + b}$ **este CRESCĂTOARE dacă** $\mathbf{a > 0}$

**Fc.** $\mathbf{f(x) = ax + b}$ **este DESCRESCĂTOARE dacă** $\mathbf{a < 0}$

**Imaginea funcției o citim de pe axa OY**

Graficul fc. de gr. 2 este o **PARABOLĂ** având **coordonatele vârfului**: $V\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)$,

$x_V = -\frac{b}{2a}$ **-pc.de maxim (minim) pt** $a < 0$ $(a > 0)$,

$y_V = -\frac{\Delta}{4a}$ **– valoare de maxim(minim) pt** $a < 0$ $(a > 0)$,

**Ecuația AXEI DE SIMETRIE a parabolei este** $x_V = -\frac{b}{2a}$

**Imaginea fucției de gr.2 este:** $Imf = \left(-\infty, -\frac{\Delta}{4a}\right]$ **dacă** $a < 0$ **,**

**respectiv:** $Imf = \left[-\frac{\Delta}{4a}, +\infty\right)$ **dacă** $a > 0$

**Imaginea funcției o citim de pe axa OY**

## ECUAȚII DE GRADUL 2

$\mathbf{ax^2 + bx + c = 0}$ **,** $\mathbf{a = \cdots, b = \cdots, c = \cdots,}$ $\Delta = \mathbf{b^2 - 4ac}$

1) $\Delta > 0 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$**, soluții reale**
2) $\Delta = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{-b}{2a}$
3) $\Delta < 0 \Rightarrow$ **nu există soluții reale, există soluții complexe :**
   $x_{1,2} = \frac{-b \pm i\sqrt{\Delta}}{2a}$

**Relațiile lui Viete:** $\begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \\ x_1 \cdot x_2 = +\frac{c}{a} \end{cases}$ **,**

$S = x_1 + x_2$ **,** $P = x_1 \cdot x_2 \Rightarrow x^2 - Sx + P = 0$

**Descompunerea:** $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$

## ECUAȚII IRATIONALE

1. $\sqrt{f(x)}$**=a , Codiții:** $f(x) \geq 0$

   $\sqrt{f(x)}$**=a** $/(\,)^2 \Rightarrow x = \cdots$

2. $\sqrt{f(x)} = g(x)$ **, Condiții:** $\begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) \geq 0 \end{cases}$

   $\sqrt{f(x)} = g(x)$ $/(\,)^2 \Rightarrow x = \cdots$

3. $\sqrt[3]{f(x)} = a$**, nu sunt condiții**

   $\sqrt[3]{f(x)} = a$ $/(\,)^3 \Rightarrow x = \cdots$

## ECUAȚII EXPONENȚIALE

$(a > 0, a \neq 1)$ Nu sunt condiții pt exponent!

1. $a^{f(x)} = a^{g(x)} \Rightarrow f(x) = g(x) \Rightarrow x = \cdots$
2. $a^{f(x)} = b \Rightarrow f(x) = \log_a b \Rightarrow x = \cdots$
3. În cazul în care în ecuație apar:
   - $a^x$ și $a^{2x}$ atunci: $a^x = t, t > 0 \Rightarrow a^{2x} = t^2$

Ex: $9^x, 6^x, 4^x \Rightarrow 3^{2x}, 2^x \cdot 3^x, 2^{2x} / : 2^{2x}$

$\Rightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^{2x}, \left(\frac{3}{2}\right)^{x}, 1$, atunci notăm $\left(\frac{3}{2}\right)^{x} = t \Rightarrow t^2, t, 1$

## ECUAȚII LOGARITMICE

1. $\log_a f(x) = \log_a g(x)$ Condiții: $\begin{cases} f(x) > 0 \\ g(x) > 0 \\ a > 0, a \neq 1 \end{cases} \Rightarrow f(x) = g(x)$
2. $\log_a f(x) = N$ Condiții: $\begin{cases} f(x) > 0 \\ a > 0, a \neq 1 \end{cases} \Rightarrow \log_a f(x) = \log_a a^N$
3. În cazul în care în ecuație apar:

   $\log_a f(x), (\log_a f(x))^2$ atunci

   $\log_a f(x) = t, (\log_a f(x))^2 = t^2 \Rightarrow$ ecuație gr. 2

## ECUAȚII TRIGONOMETRICE (1)

- $\sin x = a \Rightarrow x = (-1)^k \arcsin a + k\pi, a \in [-1, 1], k \in \mathbb{Z}$
- $\cos x = a \Rightarrow x = \pm \arccos a + 2k\pi, a \in [-1, 1], k \in \mathbb{Z}$
- $\operatorname{tg} x = a \Rightarrow x = \operatorname{arctg} a + k\pi, k \in \mathbb{Z}$
- $\operatorname{ctg} x = a \Rightarrow x = \operatorname{arcctg} a + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

## ECUAȚII TRIGONOMETRICE (2)

- $\sin f(x) = \sin g(x) \Rightarrow f(x) = (-1)^k g(x) + k\pi, k \in \mathbb{Z}$
- $\cos f(x) = \cos g(x) \Rightarrow f(x) = \pm g(x) + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$
- $\operatorname{tg} f(x) = \operatorname{tg} g(x) \Rightarrow f(x) = g(x) + k\pi,$

  unde $k \in \mathbb{Z}, \cos f(x) \neq 0, \cos g(x) \neq 0$

## ECUAȚII TRIGONOMETRICE (3)

$a \cos x + b \sin x + c = 0, \quad a, b \neq 0$

Se utilizează substituția: $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \sin x = \frac{2t}{1+t^2}$

Unde $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$

## Formule trigonometrice utilizate:

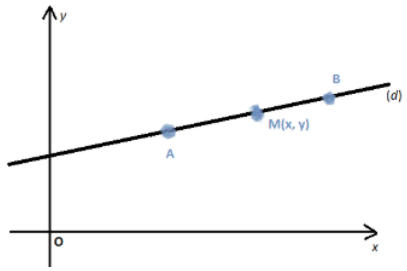
$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

$\sin 2x = 2 \cdot \sin x \cdot \cos x$

$\cos 2x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x$

# GEOMETRIE ANALITICĂ

Fie $A(x_A, y_A)$ și $B(x_B, y_B)$




Coordonatele mijlocului segmentului AB :

$$M(x_M, y_M)$$

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2},\ y_M = \frac{y_A + y_B}{2}$$

**Lungimea segmentului AB /**

**Distanța dintre punctele A și B**

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

**Ecuația unei drepte:**

- $d:\ ax + by + c = 0, b \neq 0$, cu panta $m_d = -\frac{a}{b}$
- $d:\ y = m \cdot x + n$ , cu panta $m_d = m$ – coeficientul lui x

**Dacă trece prin două puncte $A(x_A, y_A)$ și $B(x_B, y_B)$**

- $AB: \frac{x - x_A}{x_B - x_A} = \frac{y - y_A}{y_B - y_A}$ sau $AB: \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \end{vmatrix} = 0$

**Dacă trece printr-un punct $A(x_A, y_A)$ și se cunoaște panta $m_d$**

- $y - y_A = m_d\,(x - x_A)$

**Panta unei drepte:**

- care trece prin punctele $A(x_A, y_A)$ și $B(x_B, y_B)$: $m_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$
- coeficientul lui x din ecuația explicită a dreptei: $d:\ y = m \cdot x + n$

**Condiția ca un punct $A(x_A, y_A)$ să aparțină unei drepte:**

$$A(x_A, y_A) \in d \Leftrightarrow a \cdot x_A + b \cdot y_A + c = 0$$

**Distanța dintre un punct $A(x_A, y_A)$ și o dreaptă d: $ax + by + c = 0$**

$$d(A, d) = \frac{|a \cdot x_A + b \cdot y_A + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

# POZIȚIILE RELATIVE A DOUĂ DREPTE:

**Când se cunosc PANTELE:**

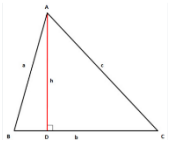
- **două drepte paralele** $d_1 \parallel d_2 \Leftrightarrow m_{d1} = m_{d2}$
- **două drepte perpendiculare** $d_1 \perp d_2 \Leftrightarrow m_{d1} \cdot m_{d2} = -1$

**Când se cunosc ECUAȚIILE generale ale dreptelor:**

$$d1:\ a_1x + b_1y + c_1 = 0 \text{ și } d2:\ a_2x + b_2y + c_2 = 0$$

- **drepte paralele** $d_1 \parallel d_2 \Leftrightarrow \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2}$
- **drepte care coincid** $d_1 = d_2 \Leftrightarrow \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$
- **drepte concurente** $d_1 \cap d_2 \Leftrightarrow \frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$

**(coordonatele punctului de intersecție se află făcând sistem din cele două ecuații ale dreptelor)**



**Ecuația înălțimii din A:** $y - y_A = m_{AD}(x - x_A)$

$$\begin{cases} m_{AD} \cdot m_{BC} = -1 \Rightarrow m_{AD} \\ A(x_A, y_A) \end{cases}$$

**Ecuația medianei din A:**

**AM :** $\frac{x - x_A}{x_M - x_A} = \frac{y - y_A}{y_M - y_A}$, $x_M = \frac{x_A + x_B}{2}$, $y_M = \frac{y_A + y_B}{2}$, **M-mijlocul lui BC**

**Ecuația mediatoarei d:**

$y - y_M = m_d(x - x_M)$, $(d \perp BC,\ M - \text{mijlocul lui } BC)$

$$\begin{cases} m_d \cdot m_{BC} = -1 \Rightarrow m_d \\ M(x_M, y_M) \end{cases}$$

**Centru de greutate G – pc. de intersecție al medianelor unui triunghi**

$G(x_G, y_G)$ , $x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{3}$, $y_G = \frac{y_A + y_B + y_C}{3}$

**Condiția de coliniaritate a trei puncte:**

$A(x_A, y_A), B(x_B, y_B), C(x_C, y_C)$ – coliniare $\Leftrightarrow \begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix} = 0$

**Condiția de existență a unui triunghi ABC:**

$\Delta = \begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix} \neq 0$

**Aria unui triunghi ABC** *știind:*

$A(x_A, y_A), B(x_B, y_B), C(x_C, y_C) \Rightarrow Aria_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}|\Delta|$

**Aria unui triunghi oarecare:**

- $Aria_\Delta = \frac{b \cdot h}{2}$, $b$ – bază, $h$ – înălțime
- $Aria_\Delta = \frac{l_1 \cdot l_2 \cdot sin(\widehat{l_1, l_2})}{2}$
- $Aria_\Delta = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$,
  $p = \frac{a+b+c}{2}$ –*semiperimetrul triunghiului*

**Raza cercului circumscris:** $R = \frac{a \cdot b \cdot c}{4 \cdot Aria_\Delta}$

**Raza cercului înscris:** $r = \frac{Aria_\Delta}{p}$ ,*p-semiperimetrul*

**Teorema SINUSULUI**: $\frac{BC}{\sin A} = \frac{AC}{\sin B} = \frac{AB}{sinC} = 2R$

**Teorema COSINUSULUI:**

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot cosA$$
$$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cdot cosB$$
$$AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2AC \cdot BC \cdot cosC$$

$cosA = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2AB \cdot AC}$, idem pt. $cosB$ si $cosC$

Din **Teorema COSINUSULUI:**

$$cos\ A = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2AB \cdot AC}$$

$$cos\ B = \frac{AB^2 + BC^2 - AC^2}{2AB \cdot BC}$$

$$cos\ C = \frac{AC^2 + BC^2 - AB^2}{2AC \cdot BC}$$

**În TRIUNGHIUL DREPTUNGHIC:**

**Teorema lui Pitagora:** $ip^2 = cat_1^2 + cat_2^2$

**Aria tr. drept.** $Aria = \frac{cat_1 \cdot cat_2}{2}$

**Înălțimea tr. drept.** $h = \frac{cat_1 \cdot cat_2}{ipot}$

**Mediana corespunzătoare ipotenuzei =** $\frac{ipotenuza}{2}$

**Raza cercului circumscris:** $R = \frac{ipotenuza}{2}$

**În TRIUNGHIUL ECHILATERAL:**

*Are toate laturile egale și toate unghiurile egale cu* $60^0$

**P=3·** $l$ – *perimetrul ;* $A = \frac{l^2\sqrt{3}}{4}$; $h = \frac{l\sqrt{3}}{2}$;

$R = \frac{2}{3} \cdot h$ - *raza cercului circumscris triunghiului echilateral*

$r = \frac{1}{3} \cdot h$ - *raza cercului înscris triunghiului echilateral*

## Trigonometrie

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

| x | 0 | $\frac{\pi}{6} = 30^0$ | $\frac{\pi}{4} = 45^0$ | $\frac{\pi}{3} = 60^0$ | $\frac{\pi}{2} = 90^0$ |
|---|---|---|---|---|---|
| sin | 0 | $\frac{1}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | 1 |
| cos | 1 | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | 0 |
| tg | 0 | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ | 1 | $\sqrt{3}$ | - |
| ctg | - | $\sqrt{3}$ | 1 | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ | 0 |

**Paritatea:**

$\sin(-x) = -\sin x$ $\quad$ $\cos(-x) = +\cos x$,

$\mathrm{tg}(-x) = -\mathrm{tg}x$ $\quad$ $\mathrm{ctg}(-x) = -\mathrm{ctg}x$

**Periodicitatea:**

$\sin(x + 2k\pi) = \sin x$ $\quad$ $\cos(x + 2k\pi) = \cos x$,

$\mathrm{tg}(x + k\pi) = \mathrm{tg}x$ $\quad$ $\mathrm{ctg}(x + k\pi) = \mathrm{ctg}x$

**Semnul funcțiilor sinus și cosinus:**

| | Cadr I | Cadr II | Cadr III | Cadr IV |
|---|---|---|---|---|
| sin | + | + | - | - |
| cos | + | - | - | + |

$$\sin = \frac{\text{cat op}}{\text{ipot}};\ \cos = \frac{\text{cat alăt}}{\text{ipot}};\ \mathrm{tg} = \frac{\text{cat op}}{\text{cat alăt}} = \frac{\sin}{\cos};\ \mathrm{ctg} = \frac{\text{cat alăt}}{\text{cat op}} = \frac{\cos}{\sin}$$

## Formule trigonometrice

$$\sin 2x = 2\sin x \cos x$$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$$
$$\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$$
$$\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$$

$$\sin(a + b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$$
$$\sin(a - b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$$

$$\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$
$$\cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$$

$$\mathrm{tg}(a + b) = \frac{\mathrm{tg}\,a + \mathrm{tg}\,b}{1 - \mathrm{tg}a \cdot \mathrm{tg}b} \qquad \mathrm{tg}(a - b) = \frac{\mathrm{tg}\,a - \mathrm{tg}\,b}{1 + \mathrm{tg}a \cdot \mathrm{tg}b}$$

$$\mathrm{tg}\,2x = \frac{2\,\mathrm{tg}x}{1 - \mathrm{tg}^2 x} \qquad \mathrm{tg}\frac{x}{2} = \frac{\sin x}{1 + \cos x}$$

$$\sin x = \frac{2 \cdot \mathrm{tg}\frac{x}{2}}{1 + \mathrm{tg}^2\frac{x}{2}} \qquad \cos x = \frac{1 - \mathrm{tg}^2\frac{x}{2}}{1 + \mathrm{tg}^2\frac{x}{2}}$$

**Transformarea unor sume în produs**

$$\sin a + \sin b = 2\sin\frac{a+b}{2} \cdot \cos\frac{a-b}{2}$$
$$\sin a - \sin b = 2\sin\frac{a-b}{2} \cdot \cos\frac{a+b}{2}$$
$$\cos a + \cos b = 2\cos\frac{a+b}{2} \cdot \cos\frac{a-b}{2}$$
$$\cos a - \cos b = -2\sin\frac{a+b}{2} \cdot \sin\frac{a-b}{2}$$

De la Cadr II la Cadr I $\sin(\pi - x) = +\sin x$ $\quad$ $\cos(\pi - x) = -\cos x$

De la Cadr III la Cadr I $\sin(\pi + x) = -\sin x$ $\quad$ $\cos(\pi + x) = -\cos x$

De la Cadr IV la Cadr I $\sin(2\pi - x) = -\sin x$ $\quad$ $\cos(2\pi - x) = \cos x$

***Obs!***

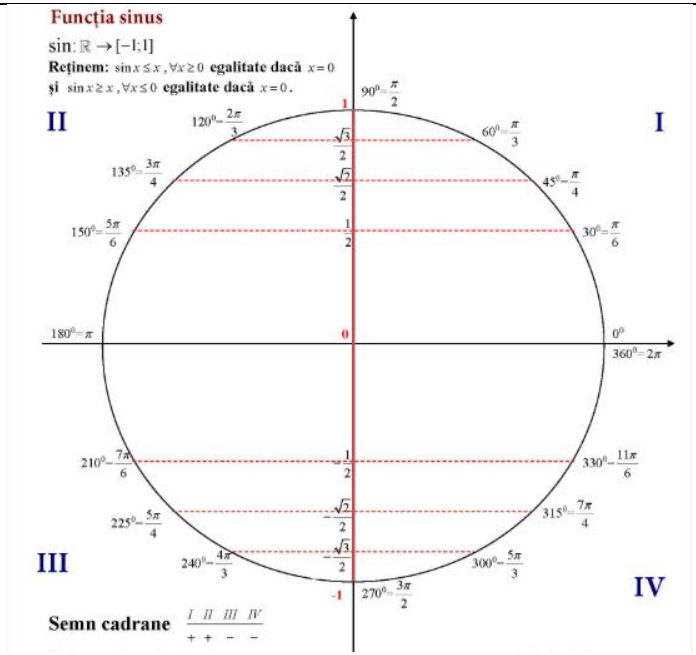
$\sin(90^0 - x) = \cos x$ $\quad$ $\cos(90^0 - x) = \sin x$

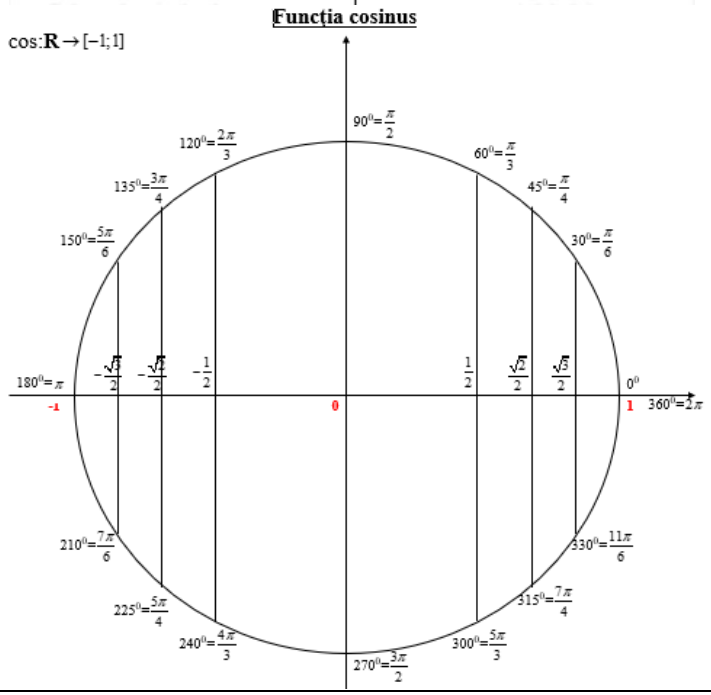
$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$ $\quad$ $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$

***Transformarea produselor în sume***

$$\sin x \cdot \cos y = \frac{\sin(x+y) + \sin(x-y)}{2} \qquad \cos x \cdot \cos y = \frac{\cos(x+y) + \cos(x-y)}{2}$$

$$\sin x \cdot \sin y = \frac{\cos(x-y) - \cos(x+y)}{2}$$




## VECTORI

$\overrightarrow{AB}$ - vector , $|\overrightarrow{AB}|$ – lungimea vectorului

$\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$

M – mijlocul lui AB $\Rightarrow \overrightarrow{OM} = \frac{\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}}{2}$, pt. orice punct din plan O

$\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A)\,\vec{i} + (y_B - y_A)\,\vec{j}$

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

$$m_{\overrightarrow{AB}} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

$\vec{v} = x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j} \quad \Rightarrow |\vec{v}| = \sqrt{x^2 + y^2}$

$\vec{v}(x, y) \Rightarrow m_v = \frac{y}{x}$ panta direcției vectorului

**Produsul *scalar* a doi vectori:**

Fie : $\vec{v}_1 = x_1 \cdot \vec{i} + y_1 \cdot \vec{j}$ ; $\vec{v}_2 = x_2 \cdot \vec{i} + y_2 \cdot \vec{j}$

$\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = x_1x_2 + y_1y_2$

$\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = |\vec{v}_1| \cdot |\vec{v}_2| \cdot \cos\,(\widehat{\vec{v}_1, \vec{v}_2})$

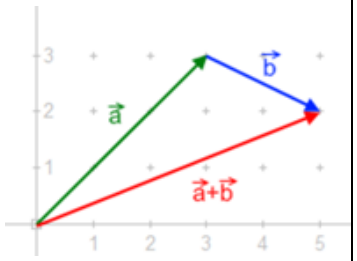
$$\Rightarrow \cos\,(\widehat{\vec{v}_1, \vec{v}_2}) = \frac{\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2}{|\vec{v}_1| \cdot |\vec{v}_2|} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2}}$$

**Vectori *coliniari:*** $\vec{v}_1, \vec{v}_2 \Leftrightarrow \frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} \Leftrightarrow m_1 = m_2;$

**Vectori *perpendiculari*:**

$$\vec{v}_1 \perp \vec{v}_2 \Leftrightarrow \vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = 0 \Leftrightarrow x_1x_2 + y_1y_2 = 0$$

***Regula triunghiului*** $\overrightarrow{AB} = \vec{a}, \overrightarrow{BC} = \vec{b}, \overrightarrow{AC} = \vec{a} + \vec{b}$



# Matrice

Matrice unitate: $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, elem. neutru pt. înmulțire

Matrice nulă: $O_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $O_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, elem. neutru pt. adunare

$A = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a} & b & c \\ d & \boldsymbol{e} & f \\ g & h & \boldsymbol{i} \end{pmatrix} \Rightarrow \boldsymbol{Tr}\,(\boldsymbol{A}) = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{e} + \boldsymbol{i}$ **(urma matricei A)**

$\Rightarrow \boldsymbol{A^t} = \begin{pmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{pmatrix}$ transpusa matricei A

În $\boldsymbol{A^t}$ liniile matricei $\boldsymbol{A}$ se transformă în coloane.

$A = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a} & b & c \\ d & \boldsymbol{e} & f \\ g & h & \boldsymbol{i} \end{pmatrix}$ și $B = \begin{pmatrix} k & l & m \\ n & o & p \\ r & s & t \end{pmatrix}$

$$A + B = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} k & l & m \\ n & o & p \\ r & s & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+k & b+l & c+m \\ d+n & \dots & \dots \\ g+r & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

$A + O_n = O_n + A = A$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a} & \boldsymbol{b} & \boldsymbol{c} \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \boldsymbol{k} & l & m \\ \boldsymbol{n} & o & p \\ \boldsymbol{r} & s & t \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a \cdot k + b \cdot n + c \cdot r & a \cdot l + b \cdot o + c \cdot s & a \cdot m + b \cdot p + c \cdot t \\ d \cdot k + e \cdot n + f \cdot r & \dots & \dots \\ g \cdot k + h \cdot n + i \cdot r & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

$A^2 = A \cdot A$, $\quad A^3 = A^2 \cdot A, \dots$

$A^n$ – prin inducție verific dacă $A^{n+1} = A^n \cdot A$-adevărată, dacă DA$\Rightarrow$ $A^n$-adevărat

$A \cdot I_n = I_n \cdot A = A, \qquad A \cdot B \neq B \cdot A$

# Determinanți

$detA = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$

$$detA = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = aei + dhc + gbf - ceg - fha - ibd$$

$\begin{matrix} \boldsymbol{a} & \boldsymbol{b} & \boldsymbol{c} \\ \boldsymbol{d} & \boldsymbol{e} & \boldsymbol{f} \end{matrix}$

Un determinant cu două linii/coloane identice are valoarea zero 0.

## Inversa unei matrice

Matricea $\boldsymbol{A}$ *este inversabilă* $\Leftrightarrow \boldsymbol{detA} \neq \boldsymbol{0}$

$\boldsymbol{A^{-1}}$ **este inversa matricei** $\boldsymbol{A} \Leftrightarrow \boldsymbol{A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = I_n}$

**Determinarea inversei unei matrice:**

- $\boldsymbol{det\ A \neq 0}$
- **Se calculează** $\boldsymbol{A^*}$ **- matricea adjunctă a matricei A**

$\boldsymbol{a_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix}}$ $\quad \boldsymbol{a_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} b & c \\ h & i \end{vmatrix}}$ $\quad \boldsymbol{a_{31} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} b & c \\ e & f \end{vmatrix}}$

$\boldsymbol{a_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix}}$ $\quad \boldsymbol{a_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} a & c \\ g & i \end{vmatrix}}$ $\quad \boldsymbol{a_{32} = \dots}$

$\boldsymbol{a_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} d & e \\ g & f \end{vmatrix}}$ $\quad \boldsymbol{a_{23} = \dots}$ $\quad \boldsymbol{a_{33} = \dots}$

- $\boldsymbol{A^* = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{det\ A} \cdot A^*}$

## Ecuații cu matrice

$\boldsymbol{A \cdot X = B \Rightarrow A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B \Rightarrow X = A^{-1} \cdot B}$

$\boldsymbol{X \cdot A = B \Rightarrow \dots \Rightarrow X = B \cdot A^{-1}}$

$\boldsymbol{A \cdot X \cdot C = B \Rightarrow \dots \Rightarrow X = A^{-1} \cdot B \cdot C^{-1}}$

## Sisteme de ecuații liniare

$rangA = 2$ dacă există un determinant de ordin $2 \neq 0$ și toți determinanții de ordin 3, 4, ... sunt 0.

**Rezolvarea sistemelor:**

$$\begin{cases} a_{11} \cdot x + a_{12} \cdot y + a_{13} \cdot z = b_1 \\ a_{21} \cdot x + a_{22} \cdot y + a_{23} \cdot z = b_2 \\ a_{31} \cdot x + a_{32} \cdot y + a_{33} \cdot z = b_3 \end{cases} \Rightarrow A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

Se calculează $\det A$

**1.Dacă** $\det A \neq 0$ $\Longrightarrow$ **sistem compatibil determinat / sistem cu soluție unică / sistem Cramer (S.C.D.)**

- $\Delta x = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$; $\Delta y = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}$; $\Delta z = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$
- $x = \frac{\Delta x}{\Delta}$ , $y = \frac{\Delta y}{\Delta}$ , $z = \frac{\Delta z}{\Delta}$
- $S = \{(x, y, z)\}$

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & b_3 \end{pmatrix}$$

**2.Dacă** $\det A = 0$ și $rang\ A = rang\bar{A}$ $\Longrightarrow$**sistem compatibil nedeterminat**

$$\Delta_C = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} x & y \end{array} \\ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \end{array} \begin{array}{l} ecuația\ 1 \\ ecuația\ 2 \end{array}$$

$\Longrightarrow$ necunoscute principale : $x$ $y$, necunoscută secundară $z$

$\Longrightarrow$ ecuații principale: $ecuația\ 1, ecuația\ 2$

$$\begin{cases} a_{11} \cdot x + a_{12} \cdot y = b_1 - a_{13} \cdot \alpha \\ a_{21} \cdot x + a_{22} \cdot y = b_2 - a_{23} \cdot \alpha \end{cases} \Longrightarrow S = \{(x_\alpha, y_\alpha, \alpha) / \alpha \epsilon \mathbb{R}\}$$

**3.Dacă** $\det A = 0$ și $rang\ A \neq rang\bar{A}$ $\Longrightarrow$ **sistem incompatibil**

## Legi de compoziție

**Parte stabilă:** $\forall\ x, y \in M \Longrightarrow x * y \in M$

**Comutativitate:** $(x * y) = (y * x)$ , $\forall\ x, y \in M$

**Asociativitate:** $(x * y) * z = x * (y * z), \forall\ x, y, z \in M$

**Element neutru:** $\exists e \in M, \forall\ x \in M$ $a.$î. $x * e = e * x = x$

**Elemente simetrizabile:** $\forall\ x \in M, \exists x' \in M$ $a.$î. $x * x' = x' * x = e$

***Morfisme de grupuri:***

$(G_1, \circ)$ , $(G_2, *)$ **- grupuri, atunci**

$f: G_1 \to G_2$ **este morfism de grupuri dacă:**

- $f(x \circ y) = f(x) * f(y), \forall\ x, y \in G_1$
- $f - bijectivă$
- $f(e_1) = f(e_2)$

***Morfisme de inele:***

$(G_1, *, \circ)$ , $(G_2, \perp, \top)$ **- inele, atunci**

$f: G_1 \to G_2$ **este izomorfism de inele dacă:**

1) $f - morfism\ de\ inele, dacă$:

- $f(x * y) = f(x) \perp f(y), \forall\ x, y \in G_1$
- $f(x \circ y) = f(x) \top f(y), \forall\ x, y \in G_1$
- $f(e_\circ) = f(e_\top)$

2) $f - bijectivă$

## Polinoame

- *Forma algebrică / forma canonică:*

$f = a_nX^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_1X + a_0\,,\ \ grad(f) = n$

- *Două polinoame $f$ și $g$ sunt egale când au același grad și coeficienții corespunzători egali*

$f = g$ *dacă:* $grad(f) = grad(g)$ *și* $a_i = b_i\,, i = \overline{1,n}$

- *Suma coeficienților este egală cu valoarea polinomului în 1*

$S = f(1) = a_n + a_{n-1} + \cdots + a_1 + a_0$

- *Numărul $\alpha$ este rădăcină pentru polinomul $f$ dacă $f(\alpha) = 0$*
- $\propto$ *este rădăcină dublă pt. polinomul. $f$ dacă* $\begin{cases} f(\propto) = 0 \\ f^{/}(\propto) = 0 \\ f^{//}(\propto) \neq 0 \end{cases}$
- *T.Î.R :* $f = g \cdot q + r\,, grad(r) < grad(g), q =$ *cât și* $r = rest$
- $\propto$ *este rădăcină dublă pt. polinomul. $f$ dacă acesta se împarte exact la* $(X-\propto)^2$
- *Câtul și restul se pot afla prin algoritmul de împărțire, dar și cu Schema lui Horner*

| $X$ | $X^5$ | $X^4$ | $X^3$ | $X^2$ | $X^1$ | $X^0$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| *coeficienți* | $a$ | $b$ | $c$ | $d$ | $e$ | $f$ | |
| $x_1$ | $a$ | $(x_1 \cdot a + b)$ | ... | .... | ... | $0$ | $(X - x_1)$ |

$x_1$ – se află între divizorii termenului liber – f

- Dacă $x_1\,, \ldots, x_n \in \mathbb{C}$ sunt rădăcinile polinomului $f$ atunci:
  $f = a(X - x_1)(X - x_2) \ldots (X - x_n)$

## Clase de resturi modulo $n$

### Teorema lui Bezout

1) *Restul împărțirii polinomului $f$ prin $(X-\propto)$ este $r = f(\propto)$*
2) $\propto$ *este rădăcină pentru $f \Leftrightarrow (X-\propto)$ divide pe $f$*

### Divizibilitatea polinoamelor

- **f este divizibil cu g, dacă restul împărțirii lui f la g este zero**

$$f \vdots g \Leftrightarrow r = 0$$

- **f este divizibil cu (x-a), dacă și numai dacă f(a)=0**

$$f \vdots (x-a) \Leftrightarrow f(a) = 0$$

- **f este divizibil cu produsul dintre g și h dacă și numai dacă f este divizibil atât cu g, cât și cu h.**

$$f \vdots (g \cdot h) \Leftrightarrow f \vdots g \text{ și } f \vdots h$$

***Relațiile lui Viete*** pt Polinoame de gr 3: $f = aX^3 + bX^2 + cX + d$

$$\begin{cases} S_1 = x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{b}{a} \\ S_2 = x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3 = +\frac{c}{a}; \\ S_3 = x_1x_2x_3 = -\frac{d}{a} \end{cases} \qquad x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = S_1^2 - 2S_2$$

### Algoritmul determinării sumei $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3$

$x_1 - \text{rădăcină} \Rightarrow f(x_1) = 0 \Rightarrow ax_1^3 + bx_1^2 + cx_1 + d = 0\ (1)$
$x_2 - \text{rădăcină} \Rightarrow f(x_2) = 0 \Rightarrow ax_2^3 + bx_2^2 + cx_2 + d = 0\ (2)$
$x_3 - \text{rădăcină} \Rightarrow f(x_3) = 0 \Rightarrow ax_3^3 + bx_3^2 + cx_3 + d = 0\ (3)$

**Din** $(1) + (2) + (3) \Rightarrow$

$$a(x_1^3 + x_2^3 + x_3^3) + b(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) + c(x_1 + x_2 + x_3) + 3d = 0$$

$$\mathbb{Z}_n = \{\hat{0}, \hat{1}, \hat{2}, \dots, \hat{n}\}$$

Exemplu :$\mathbb{Z}_4 = \{\hat{0}, \hat{1}, \hat{2}, \hat{3}\}$

+ - Este comutativă

- Este asociativă
- Element neutru $\hat{0}$
- Elemente simetrizabile: perechile de elemente care compuse dau $\hat{0}$

$(\mathbb{Z}_4, +)$ grup abelian , $(\mathbb{Z}_4, \cdot)$ nu este grup

| + | $\hat{0}$ | $\hat{1}$ | $\hat{2}$ | $\hat{3}$ |
|---|---|---|---|---|
| $\hat{0}$ | $\hat{0}$ | $\hat{1}$ | $\hat{2}$ | $\hat{3}$ |
| $\hat{1}$ | $\hat{1}$ | $\hat{2}$ | $\hat{3}$ | $\hat{0}$ |
| $\hat{2}$ | $\hat{2}$ | $\hat{3}$ | $\hat{0}$ | $\hat{1}$ |
| $\hat{3}$ | $\hat{3}$ | $\hat{0}$ | $\hat{1}$ | $\hat{2}$ |

| $\cdot$ | $\hat{0}$ | $\hat{1}$ | $\hat{2}$ | $\hat{3}$ |
|---|---|---|---|---|
| $\hat{0}$ | $\hat{0}$ | $\hat{0}$ | $\hat{0}$ | $\hat{0}$ |
| $\hat{1}$ | $\hat{0}$ | $\hat{1}$ | $\hat{2}$ | $\hat{3}$ |
| $\hat{2}$ | $\hat{0}$ | $\hat{2}$ | $\hat{0}$ | $\hat{2}$ |
| $\hat{3}$ | $\hat{0}$ | $\hat{3}$ | $\hat{2}$ | $\hat{1}$ |

***Obs:***

$f \in \mathbb{Q}[X], x_1 = a + \sqrt{b}$ rădăcină a lui $f \Rightarrow x_2 = a - \sqrt{b}$ rădăcină

$f \in \mathbb{R}[X], x_1 = a + bi$ rădăcină a lui $f \Rightarrow x_2 = a - bi$ rădăcină

**Rezolvarea ecuației reciproce de grad 4:**

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + bx + a = 0 / \cdot \frac{1}{x^2}$$

$$a\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + b\left(x + \frac{1}{x}\right) + c = 0$$

Facem substituția $x + \frac{1}{x} = t$ și $x^2 + \frac{1}{x^2} = t^2 - 2$

$$\Rightarrow at^2 + bt + c - 2a = 0 \Rightarrow t = \cdots$$

## ŞIRURI

### Şiruri monotone

$(a_n)_{n\geq 1}$se numește crescător(descrescător) dacă:

$a_n \leq a_{n+1}, \forall\, n\epsilon\mathbb{N}^*$, (respectiv $a_n \geq a_{n+1}, \forall\, n\epsilon\mathbb{N}^*$)

- monoton crescător

$(a_n)_{n\geq 1}$ monoton crescător dacă $a_{n+1} - a_n \geq 0, \forall\, n \geq 1$

Sau

$(a_n)_{n\geq 1}$ cu$a_n > 0, \forall n \geq 1$ este monoton crescător dacă $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1, \forall\, n \geq 1$

- monoton descrescător

$(a_n)_{n\geq 1}$ monoton crescător dacă $a_{n+1} - a_n \leq 0, \forall\, n \geq 1$

Sau

$(a_n)_{n\geq 1}$ cu$a_n > 0, \forall n \geq 1$ este monoton crescător dacă $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq 1, \forall\, n \geq 1$

❖ $(a_n)_{n\geq 1}$se numește mărginit dacă există $m, M\epsilon\mathbb{R}$ a.î. $m \leq a_n \leq M, \forall\, n\epsilon\mathbb{N}^*$

### Criterii de existență a limitei unui şir

#### Criteriul cleştelui

- Dacă $x_n \leq a_n \leq y_n, \forall\, n \geq n_0$ şi $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} y_n = l \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n = l$

#### Criteriul raportului

$(a_n)_{n\epsilon\mathbb{N}}$ şir cu termeni pozitivi

- Dacă $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l\ \epsilon[0,1)\ atunci \lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$
- Dacă $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l\ \epsilon(1,+\infty)\ sau\ l = +\infty \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} a_n = +\infty$

#### Lema Cesaro-Stolz

$(a_n)_{n\geq 1}$ şi $(b_n)_{n\geq 1}$ – şiruri de numere reale

- Dacă $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n} = l\epsilon\overline{\mathbb{R}}$, iar $(b_n)_{n\geq 1}$-monoton şi mărginit atunci : $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = l$

#### Criteriul rădăcinii

$(a_n)_{n\epsilon\mathbb{N}}$ şir cu termeni pozitivi

- Dacă $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l, atunci \lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = l$

### Convergența

Un şir este convergent dacă acesta are limită finită.

Un şir este divergent dacă acesta are limita $\pm\infty$ sau nu are limită.

❖ Un şir este convergent dacă este convergent şi mărginit.

## Funcții

$\boldsymbol{f: A \to B, f(x)}$

**Limite laterale:** $\boldsymbol{l_s(x_0) = \lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x<x_0}} f(x);\ l_d(x_0) = \lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x>x_0}} f(x)}$

**Funcția are limită în** $\boldsymbol{x_0 \Leftrightarrow l_s(x_0) = l_d(x_0)}$

**Cazuri de nedeterminare:**

❖ **Cazul $\frac{\infty}{\infty}$: -** se utilizează Factorul comun forțat

- **Regula lui l`Hospital:** $\boldsymbol{\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to x_0} \frac{(f(x))'}{(g(x))'}}$

❖ **Cazul $\infty - \infty$: -** se utilizează Factorul comun forțat

- **Amplificare cu conjugata:** $\boldsymbol{f - g = \frac{(f-g)(f+g)}{(f+g)}}$
- Proprietățile logaritmilor: $lnf(x) - lng(x) = ln\frac{f(x)}{g(x)}$

❖ **Cazul $\frac{0}{0}$: - se utilizează limite remarcabile**

- **Regula lui l`Hospital:** $\boldsymbol{\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to x_0} \frac{(f(x))'}{(g(x))'}}$

❖ **Cazul $\infty \cdot 0$: - se utilizează limite remarcabile**

- **Regula lui l`Hospital:** $\boldsymbol{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\, g(x) = \lim\limits_{x\to x_0} \frac{(g(x))'}{\left(\frac{1}{f(x)}\right)'}}$

❖ **Cazul $1^{\infty}$**

$$\lim_{x\to x_0}(1+u(x))^{\frac{1}{u(x)}} = e, u(x)\to 0$$

❖ **Cazul $0^0$ *sau* $\infty^0$**

$$\lim_{x\to x_0} f(x)^{g(x)} = \lim_{x\to x_0} e^{lnf(x)^{g(x)}} = \lim_{x\to x_0} e^{g(x)lnf(x)}$$

## ASIMPTOTE

### ASIMPTOTE VERTICALE

$\lim_{x\to a} f(x) = \pm\infty \Rightarrow x = a$ **este asimptotă verticală la** $\pm\infty$

### ASIMPTOTE ORIZONTALE

$\lim_{x\to -\infty} f(x) = a \Rightarrow y = a$ **este asimptotă orizontală la** $-\infty$

$\lim_{x\to \pm\infty} f(x) = a \Rightarrow y = a$ **este asimptotă orizontală la** $+\infty$

## Rezultate utile în rezolvarea limitelor !!!

$$\frac{1}{0_+} = +\infty, \quad \frac{1}{0_-} = -\infty, \quad \frac{nr.}{\pm\infty} = 0$$

$$\ln 1 = 0, \quad \ln e = 1, \quad \ln 0 = -\infty, \quad \ln\infty = \infty$$

$$e^0 = 1, \quad e^{-\infty} = 0, \quad e^{\infty} = \infty$$

$$a^{\infty} = \begin{cases} \infty, & a > 1 \ (baza\ supraunitară) \\ 0, & x\epsilon(-1,1) \end{cases}$$

$$\arctan\infty = \frac{\pi}{2}, \quad \arctan(-\infty) = -\frac{\pi}{2},$$

$0_+$ , $0_-$ apar din studiul semnului funcției în punctele care generează valoarea zero=0

Ex: $\frac{2x}{1-x^2} \Rightarrow x_{1,2} = \pm 1 \Rightarrow$

| $x$ | $-\infty$ | $-1$ | | $+1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $1-x^2$ | - - - | $0_-$ / $0_+$ | + + + | $0_+$ / $0_-$ | - - - | |

## ASIMPTOTE OBLICE

**!!! dacă nu există Asimptote Orizontale, verificăm dacă există *asimptote oblice***

$y = mx + n, m \neq 0, m, n - nr. finite$

$$m = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}, \quad n = \lim_{x\to\pm\infty}[f(x) - mx]$$

(idem pentru $x \to -\infty$)

## CONTINUITATE

**O funcție** $f: D \to \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} \dots\dots, x \le x_0 \\ \dots\dots, x > x_0 \end{cases}$ **este CONTINUĂ** dacă

Știind că $f$ este continuă pe $D - \{x_0\}$ fiind formată din funcții elementare, Verificăm dacă $f$ este continuă în $x = x_0$,.

$$\lim_{\substack{x\to x_0 \\ x<x_0}} f(x) = \lim_{\substack{x\to x_0 \\ x>x_0}} f(x) = f(x_0)$$

## O ecuație $f(x) = 0$ are cel puțin o soluție pe intervalul (a,b)

**Dacă:** $f: I \to \mathbb{R}$ *o fc. continuă pe* $I$ *și* $a, b\epsilon I, a < b;\ (a,b) \subseteq I$ și $f(a)\cdot f(b) < 0 \ \Rightarrow f(x) = 0$ *are o singură soluție pe* $(a,b)$

## Valoarea derivatei într-un punct $x_0$

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f^{/}(x_0)$$

**Ecuația unei drepte** de pantă $m$,
care trece printr-un punct $A(x_0, y_0)$
este: $y - y_0 = m(x - x_0)$ unde:
$y = f(x)$ , ***panta este*** $m = tg\ \alpha = f^{/}(x_0)$

## Ecuația tangentei

Se obține din limita de mai sus, trecând numitorul peste egal în dreapta (cu înmulțire)

$$f(x) - f(x_0) = f^{/}(x_0)(x - x_0)$$

$\Rightarrow \quad y - f(x_0) = f^{/}(x_0)(x - x_0)$ **– ECUAȚIA TANGENTEI**

**Funcția $f$ este derivabilă în $x_0$ dacă $f_s^{/}(x_0) = f_d^{/}(x_0)$ finite.**

**Teor. lui Rolle**: $\begin{cases} f\ continua\ pe\ [a,b] \\ f\ derivabilă\ pe\ (a,b) \Rightarrow \exists\ c\epsilon(a,b) a.î.\ f^{/}(c) = 0 \\ f(a) = f(b) \end{cases}$

## Șirul lui Rolle:

determină numărul de soluții reale ale ecuației $f(x) = 0$

etape: - se determină $f^{/}(x)$

- se rezolvă ecuația: $f^{/}(x)$=0

- Numărul de schimbări de semn indică numărul de soluții.

| $x$ | |
|---|---|
| $f^{/}(x)$ | |
| $f(x)$ | |
| Șirul lui Rolle | |

## Reguli de derivare

Derivata funcției $f$ în $x_0$ este $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$.

***Reguli de derivare***

$(f \pm g)' = f' \pm g'$

$(cf)' = cf'$ , $c$ = *constantă/număr*

$(fg)' = f'g + fg'$

$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$

$\left(\frac{1}{g}\right)' = -\frac{g'}{g^2}$

**Ecuația tangentei** la $G_f$ în $x_0$ este $y - f(x_0) = f'(x_0) \cdot (x - x_0)$.

## Rolul DERIVATEI I :

### 1) MONOTONIE

$f^{/}(x) \geq 0, \forall x\epsilon I$ $\Rightarrow$ f este monoton crescătoare pe I

$f^{/}(x) \leq 0, \forall x\epsilon I$ $\Rightarrow$ f este monoton descrescătoare pe I

### 2) Intervalele de monotonie și PUNCTELE DE EXTREM

Între soluțiile ecuației $f^{/}(x)$=0 se află **punctele de extrem**.

Intervalele de monotonie sunt date de semnul derivatei I, din tabelul de semn al derivatei I.

| $x$ | | $x_1$ | | $x_2$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| $f^{/}(x)$ | + + | 0 | - - - - - | 0 | + + |
| $f(x)$ | ↗ ↗ | $f(x_1)$ | ↘ ↘ | $f(x_2)$ | ↗ ↗ |
| | | Maxim | | minim | |

### 3) Rezolvarea unor inecuații / inegalități

$x = x_0\ punct\ de\ minim \Rightarrow f(x_0) \leq f(x), \forall x\epsilon D$

$x = x_0\ punct\ de\ maxim \Rightarrow f(x) \leq f(x_0), \forall x\epsilon D$

## Rolul DERIVATEI II :

### 1) Convexitate / concavitate

$f^{//}(x) \geq 0, \forall x\epsilon I$ $\Rightarrow$ f este CONVEXĂ pe I

$f^{//}(x) \leq 0, \forall x\epsilon I$ $\Rightarrow$ f este CONCAVĂ pe I

### 2) Intervale de convexitate/concavitate și PUNCTE DE INFLEXIUNE

Între soluțiile ecuației $f^{//}(x)$=0 se află **punctele de INFLEXIUNE**.

Intervalele de convexitate sunt date de semnul derivatei II, din tabelul de semn al derivatei II.

## Derivatele funcțiilor simple respectiv compuse

1. $c' = 0$
2. $x' = 1$
3. $(x^n)' = nx^{n-1}$
4. $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
5. $(\sqrt[n]{x})' = \frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$
6. $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$
7. $(e^x)' = e^x$
8. $(a^x)' = a^x \ln a$
9. $(\ln x)' = \frac{1}{x}$
10. $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$
11. $(\sin x)' = \cos x$
12. $(\cos x)' = -\sin x$
13. $(tg\, x)' = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + tg^2 x$
14. $(ctg\, x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$
15. $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
16. $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
17. $(arctg\, x)' = \frac{1}{x^2+1}$
18. $(arcctg\, x)' = -\frac{1}{x^2+1}$
19. $\left(\sqrt{x^2+a^2}\right)' = \frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}}$
20. $\left(\sqrt{x^2-a^2}\right)' = \frac{x}{\sqrt{x^2-a^2}}$
21. $\left(\sqrt{a^2-x^2}\right)' = \frac{-x}{\sqrt{a^2-x^2}}$

1. $(u^n)' = n \cdot u^{n-1} \cdot u'$
2. $(u^2)' = 2 \cdot u \cdot u'$
3. $\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{1}{u^2} \cdot u'$
4. $(\sqrt{u})' = \frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot u'$
5. $(\sqrt[n]{u})' = \frac{1}{n \cdot \sqrt[n]{u^{n-1}}} \cdot u'$
6. $(e^u)' = e^u \cdot u'$
7. $(a^u)' = a^u \cdot \ln a \cdot u'$
8. $(\ln u)' = \frac{1}{u} \cdot u'$
9. $(\log_a u)' = \frac{1}{u \cdot \ln a} \cdot u'$
10. $(\sin u)' = \cos u \cdot u'$
11. $(\cos u)' = -\sin u \cdot u'$
12. $(tg\, u)' = \frac{1}{\cos^2 u} \cdot u'$
13. $(ctg\, u)' = -\frac{1}{\sin^2 u} \cdot u'$
14. $(\arcsin u)' = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$
15. $(arctg\, u)' = \frac{1}{u^2+1} \cdot u'$
16. $(\arccos u)' = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$
17. $(arcctg\, u)' = -\frac{1}{u^2+1} \cdot u'$

# PRIMITIVE

**Def:** **F** este **primitivă** a funcției **f** dacă: $\begin{cases} 1.\ \boldsymbol{F}\ derivabilă\ pe\ D \\ 2.\ \boldsymbol{F}^{/}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}), \forall\ x \epsilon D \end{cases}$

**Primitiva** unei funcții **se calculează** cu formula: $\boldsymbol{F(x)} = \int \boldsymbol{f(x)dx}$

**Știm primitiva** $F(x)$ atunci **funcția** $f(x)$ **va fi** dată de: $\boldsymbol{F^{/}(x) = f(x)}$

O funcție **f admite primitive** pe D **dacă** funcția **f este continuă** pe D.

## PROPRIETĂȚI ALE INTEGRALEI NEDEFINITE

$$\int (f(x) + g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$$

$$\int a \cdot f(x)dx = a \int f(x)dx$$

Obs. Ex.: $\int \boldsymbol{e^2} f(x)dx = \boldsymbol{e^2} \int f(x)dx$ ; $\int \boldsymbol{ln5}\, f(x)dx = \boldsymbol{ln5} \int f(x)dx$ în aceste cazuri $\boldsymbol{e^2}$ , $\boldsymbol{ln5}$ sunt constante/numere

## METODE DE INTEGRARE

1. **Aplicarea directă a formulelor**
2. **Integrarea prin părți**

| | |
|---|---|
| I | Inverse Trigonometric Functions $\arcsin x, \arctan x, \ldots$ |
| L | Logarithmic Functions $\ln x, \log x, \log_2 x, \ldots$ |
| A | Algebraic Functions $x, x^2, x^3, 2x^5, \ldots$ |
| T | Trigonometric Functions $\sin x, \cos x, \tan x, \ldots$ |
| E | Exponential Functions $e^x, e^{2x}, 2^x, 3^{-x}, \ldots$ |

$$\int f g' dx = fg - \int f' g dx$$

**- pentru identificarea funcției $f$ se poate aplica metoda ILATE, care indică alegerea optimă a funcției f, astfel aceasta va fi funcția care se află cel mai aproape de inceputul (partea de sus) a tabelului**

$$\boldsymbol{f} \Rightarrow \boldsymbol{f^{/}}$$

$$\boldsymbol{g^{/}} \Rightarrow \boldsymbol{g} = \int \boldsymbol{g^{/}dx}$$

$$\int \boldsymbol{f \cdot g^{/}dx} = \boldsymbol{f \cdot g} - \int \boldsymbol{f^{/} \cdot g\, dx}$$

## *Integrale nedefinite*

| | |
|---|---|
| 1. | $\int dx = x + C$ |
| 2. | $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$ |
| 3. | $\int x\, dx = \frac{x^2}{2} + C$ |
| 4. | $\int \sqrt{x}\, dx = \frac{2}{3}x\sqrt{x} + C$ |
| 5. | $\int \frac{1}{\sqrt{x}}\, dx = 2\sqrt{x} + C$ |
| 6. | $\int \frac{1}{x} dx = ln\lvert x\rvert + C$ |
| 7. | $\int \frac{1}{ax+b} dx = \frac{1}{a} ln\lvert ax+b\rvert + C$ |
| 8. | $\int \frac{1}{x^2} dx = -\frac{1}{x} + C$ |
| 9. | $\int lnx\, dx = xlnx - x + C$ |
| 10. | $\int e^x dx = e^x + C$ |
| 11. | $\int e^{-x} dx = -e^{-x} + C$ |
| 12. | $\int a^x\, dx = \frac{a^x}{ln\, a} + C$ |
| 13. | $\int sin\, x\, dx = -cos\, x + C$ |
| 14. | $\int cos\, x\, dx = sin\, x + C$ |
| 15. | $\int tg\, x\, dx = -ln\,\lvert cos\, x\rvert + C$ |
| 16. | $\int ctg\, x\, dx = ln\,\lvert sin\, x\rvert + C$ |
| 17. | $\int f'(x)\, dx = f(x) + C$ |
| 18. | $\int f(x)f'(x)\, dx = \frac{f^2(x)}{2} + C$ |
| 19. | $\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = ln\lvert f(x)\rvert + C$ |
| 20. | $\int f^n(x)f'(x)\, dx = \frac{f^{n+1}(x)}{n+1} + C$ |

## 3. Schimbarea de variabilă

$\boldsymbol{I(x) = \int f(u(x))dx}$,

**dacă este cazul se face artificiul** $= \frac{1}{a}\int a \cdot f(u(x))dx$

**- se folosește substituția:**

$$t = u(x) \quad /'$$

$$1 \cdot dt = u'(x) \cdot dx \quad \Rightarrow \quad I(t) = \int f(t)dt$$

## 4. Integrarea funcțiilor raționale

$$\int \frac{1}{ax+b} dx = \frac{1}{a} ln\lvert ax+b\rvert + C$$

$$\int \frac{1}{(ax+b)(cx+d)} dx \Rightarrow \frac{1}{(ax+b)(cx+d)} = \frac{A}{(ax+b)} + \frac{B}{(cx+d)}$$

- se aduc fracțiile la același numitor $\Rightarrow 1 = (cx+d)A + (ax+b)B$ (1)

- se identifică soluția fiecărei ecuații din paranteză:

$(cx+d) = 0 \Rightarrow x_1$ , *care se înlocuiește în relația* (1) *și se află* $B$

$(ax+b) = 0 \Rightarrow x_2$ , *care se înlocuiește în relația* (1) *și se află* $A$

-se revine în substituție și se rezolvă cu formula care conduce spre logaritm

-aceeași metodă se aplică și încazul în care numărătorul integralei inițiale are altă valoare diferită de 1

$$\int \frac{1}{(ax+b)(cx+d)^2} dx \Rightarrow \frac{1}{(ax+b)(cx+d)^2} = \frac{A}{(ax+b)} + \frac{B}{(cx+d)} + \frac{C}{(cx+d)^2}$$

-același algoritm ca mai sus

| | |
|---|---|
| 21. | $\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\operatorname{ctg} x + C$ |
| 22. | $\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x + C$ |
| 23. | $\int (1 + \operatorname{tg}^2 x)\, dx = \operatorname{tg} x + C$ |
| 24. | $\int \frac{1}{x^2 - a^2} dx = \frac{1}{2a} \ln \left\lvert \frac{x-a}{x+a} \right\rvert + C$ |
| 25. | $\int \frac{1}{x^2 - 1} dx = \frac{1}{2} \ln \left\lvert \frac{x-1}{x+1} \right\rvert + C$ |
| 26. | $\int \frac{1}{x^2 + a^2} dx = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C$ |
| 27. | $\int \frac{1}{x^2 + 1} dx = \operatorname{arctg} x + C$ |
| 28. | $\int \frac{1}{\sqrt{x^2 + a^2}} dx = \ln(x + \sqrt{x^2 + a^2}) + C$ |
| 29. | $\int \frac{1}{\sqrt{x^2 - a^2}} dx = \ln \left\lvert x + \sqrt{x^2 - a^2} \right\rvert + C$ |
| 30. | $\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = \arcsin \frac{x}{a} + C$ |
| 31. | $\int \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} dx = \arcsin x + C$ |
| 32. | $\int \frac{x}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} dx = \sqrt{x^2 \pm a^2} + C$ |
| 33. | $\int \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = -\sqrt{a^2 - x^2} + C$ |
| 34. | $\int \sqrt{x^2 + a^2}\, dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2 + a^2} + \frac{a^2}{2} \ln(x + \sqrt{x^2 + a^2}) + C$ |
| 35. | $\int \sqrt{x^2 - a^2}\, dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2 - a^2} - \frac{a^2}{2} \ln \left\lvert x + \sqrt{x^2 - a^2} \right\rvert + C$ |
| 36. | $\int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} + C$ |
| 37. | $\int f(x)\, dx = F(x) + C$ $\quad$ $F$ primitiva funcției $f$ |
| 38. | $\int F(x) f(x)\, dx = \frac{F^2(x)}{2} + C$ |
| 39. | $\int \frac{f(x)}{F(x)} dx = \ln\lvert F(x)\rvert + C$ |
| 40. | $\int f(x) g'(x) dx = f(x) g(x) - \int f'(x) g(x) dx$ |

## INTEGRALA DEFINITĂ

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)/_a^b = \mathrm{F(b) - F(a)}$$

**Proprietăți:**

$$\int_a^a f(x)dx = 0, \qquad \int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx,$$

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

**Aplicații:**

1. **Aria unei suprafețe plane cuprinse între graficul funcției Gf, axa Ox și dreptele de ecuații x = a și x = b**

$$Aria(\Gamma_f) = \int_a^b |f(x)|dx$$

2. **Aria suprafeței plane cuprinse între graficele a două grafice**

$$Aria(\Gamma_{f,g}) = \int_a^b |f(x) - g(x)|dx$$

3. **Volumul unui corp de rotație determinat de graficul funcției**

$$Vol(C_f) = \pi \int_a^b f^2(x)dx$$